

УДК 532.59

## ВПЛИВ НАЯВНОСТІ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ НА ХВИЛЬОВІ ПАКЕТИ, ЩО ПОШИРЮЮТЬСЯ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ

**О. В. АВРАМЕНКО, В. В. НАРАДОВИЙ**

Работа посвящена влиянию свободной поверхности на распространение волновых пакетов в двухслойной жидкости за счет наличия дополнительной пары корней дисперсионного уравнения. В частности, исследуется форма волновых пакетов на поверхности контакта и на свободной поверхности.

The work is devoted to the influence of the free surface on the propagation of wave packets in two-layer fluid. This effect is due to the presence an extra pair of roots of dispersion equation. We investigate the shape of the wave packets on the contact surface and on the free surface.

**Вступ.** Великі труднощі математичного характеру, що зустрічаються при розв'язуванні задач точної хвильової теорії, приводять до необхідності розвитку різного роду наближених нелінійних теорій. В результаті інтенсивно розвивались асимптотичні підходи, і вони по суті домінують в проведенні кількісного і якісного аналізу явищ. Поява рівняння Шредінгера значно допомогла аналізу важливих фізичних параметрів хвильового пакету.

В роботах [4, 5] розглядаються такі фізичні параметри як стійкість та форма хвильових пакетів, з використання еволюційних рівнянь похідних у вигляді нелінійних рівнянь Шредінгера для таких систем «шар - шар», «півпростір з вільною поверхнею».

Дослідження задач поширення хвильових пакетів в різних гідродинамічних системах обов'язково включає в себе аналіз дисперсійного співвідношення. У раніше досліджуваних роботах для систем «півпростір - півпростір», «півпростір з вільною поверхнею», «шар - півпростір», «шар - шар» дисперсійне рівняння завжди мало одну пару коренів. Дана робота присвячена впливу наявності вільної поверхні на поширення хвильових пакетів в двошаровій рідині за рахунок появи додаткової пари коренів дисперсійного рівняння.

**Постановка задачі.** У роботі розглядається поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». Верхня і нижня рідини є ідеальними і нестисливими. Враховується сила поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Математична постановка задачі

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi_j &= 0 \text{ в } \Omega_j, \\ \eta_{,t} - \varphi_{j,z} &= -\alpha \varphi_{j,x} \eta_{,x} \text{ на } z = \alpha \eta(x, t), \\ \eta_{0,t} - \varphi_{2,z} &= -\alpha \varphi_{2,x} \eta_{0,x} \text{ на } z = \alpha \eta_0(x, t),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + 0.5 \alpha \left[ (\nabla \varphi_1)^2 - \rho (\nabla \varphi_2)^2 \right] - \\ - T \left( 1 + \alpha^2 \eta_{,x}^2 \right)^{-3/2} \eta_{,xx} &= 0 \text{ на } z = \alpha \eta(x, t), \\ \varphi_{2,t} + \eta_0 + 0.5 \alpha (\nabla \varphi_2)^2 - T_0 \left( 1 + \alpha^2 \eta_{0,x}^2 \right)^{-3/2} \eta_{0,xx} &= 0 \text{ на } z = \alpha \eta_0(x, t), \\ \varphi_{1,z} &= 0 \text{ при } z = -h_1,\end{aligned}$$

де  $j = 1, 2$ ,  $\rho = \rho_2 / \rho_1$  - відношення густин верхнього і нижнього шарів,  $\alpha = a / L$  - коефіцієнт нелінійності,  $\eta(x, t)$  - відхилення поверхні контакту,  $\eta_0(x, t)$  - відхилення вільної поверхні.

Для розв'язання задачі (1) використали метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Перші три лінійні наближення та еволюційні рівняння обвідних наведено, наприклад, в [2].

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння має 2 пари коренів. Перша пара коренів – частот хвильового пакету - аналогічна до пари коренів «півпростір – півпростір». Друга пара частот з'явилась вперше серед аналогічних задач для гідродинамічних систем. Поява другої пари частот обумовлена наявністю двох поверхонь, вздовж яких поширюються хвильові пакети: вздовж поверхні контакту – внутрішні хвилі, а вздовж вільної поверхні – поверхневі хвилі.

Детальний аналіз першого лінійного наближення для обох пар коренів дисперсійного рівняння наведено в [1]. Дослідження модуляційної стійкості та форми хвильового пакету для першої пари частот, аналогічної до отриманої в попередніх дослідженнях, проведено в [2, 3]. В даній роботі ми досліджуємо форму хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні для другої пари частот.

**Форма хвильових пакетів.** Еволюційні рівняння для обвідних хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні мають вигляд

$$\begin{aligned} A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5\omega'' A_{,xx} &= \alpha^2 I A^2 \bar{A}, \\ A_{,t}^0 + \omega' A_{,x}^0 - 0.5\omega'' A_{,xx}^0 &= \alpha^2 I_0 (A^0)^2 \bar{A}^0 \end{aligned} \quad (2)$$

де  $A$  та  $A^0$  обвідні хвильових пакетів на поверхні контакту та вільній поверхні відповідно;  $I_0 = \frac{\lambda^2}{\omega^4} I$  [2]. Як і в попередніх роботах [4, 5], рівняння

(2) мають розв'язки, які залежать тільки від часу

$$A = a \exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I t), \quad (3)$$

$$A^0 = a \exp(i\alpha^2 a^2 \omega^{-1} I_0 t). \quad (4)$$

Тоді, форма хвильового пакету на поверхні контакту визначається формулою

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + \alpha A^2 \Lambda \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2), \quad (5)$$

а на вільній поверхні формулою

$$\eta_0(x, t) = A^0 \cos(kx - \omega t) + \alpha (A^0)^2 \Lambda_0 \cos(2kx - 2\omega t) + O(\alpha^2), \quad (6)$$

де  $A$  та  $A^0$  визначаються за формулами (3) і (4).

Для визначення форми поверхні контакту  $\eta(x, t)$  важливий знак  $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = L_1 / L_2$ . Якщо для першої пари частот налічувалось декілька областей знакостійкості  $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k)$  на площині  $(\rho, k)$ , то для другої пари

частот завжди виконується нерівність  $\Lambda(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) > 0$ , тобто на всій площині поверхні контакту буде мати  $\cup$ -образну форму. Перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$ , а також відхилення поверхні контакту представлені на рис. 1 для параметрів  $\alpha = 0.1$ ,  $h_1 = 10$ ,  $h_2 = 1$ ,  $T_0 = 0.001$ ,  $T = 0$ ,  $t = 0$ ,  $a = 0.5$ ,  $\rho = 0.9$ ,  $k = 0.32$  ( $\Lambda = 1.58516$ ).

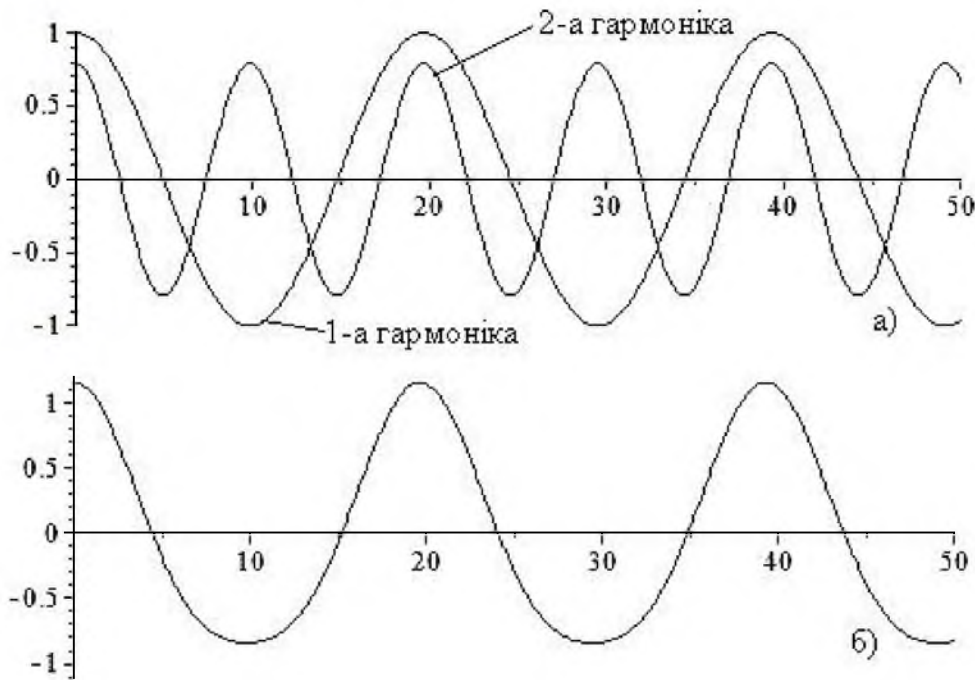


Рис. 1 Відхилення поверхні контакту

а) перші дві гармоніки  $\eta_1(x, t)$  та  $\eta_2(x, t)$ ;

б)  $\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \alpha\eta_2(x, t)$

Як і для поверхні контакту, форма  $\eta_0(x, t)$  визначається в залежності від знаку  $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) = M_1 / M_2$ . Графіки кривих  $M_1 = 0$  та  $M_2 = 0$  показані на рисунку нижче (рис. 2). Криві розбивають область  $(\rho, k)$  на три області  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . В областях  $S_1$  та  $S_3$   $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) > 0$ , а в області  $S_2$  -  $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k) < 0$ .

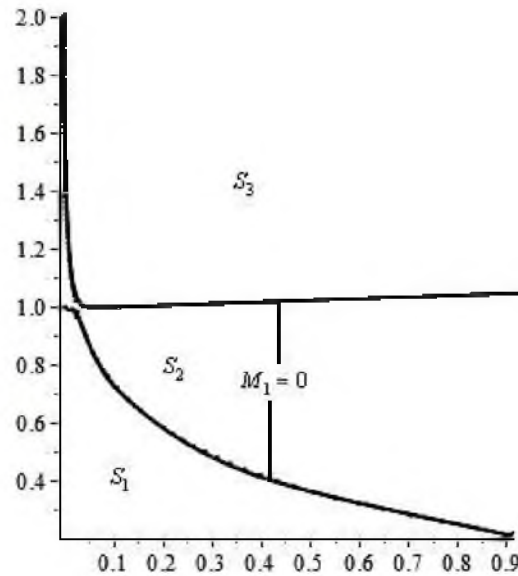


Рис. 2. Области знакостійкості  $\Lambda_0(h_1, h_2, T, T_0, \rho, k)$ .

Перші дві гармоніки  $\eta_{01}(x, t)$  та  $\eta_{02}(x, t)$ , а також відхилення вільної поверхні представлені при значенні параметрів  $\alpha = 0.1$ ,  $h_1 = 10$ ,  $h_2 = 1$ ,  $T_0 = 0.001$ ,  $T = 0$ ,  $t = 0$ ,  $a = 0.5$ , на рис 3. для  $\rho = 0.9$ ,  $k = 0.6$  ( $\Lambda = -0.65459$ ) та на рис. 4 для  $\rho = 0.9$ ,  $k = 0.32$  ( $\Lambda = 1.58516$ ).

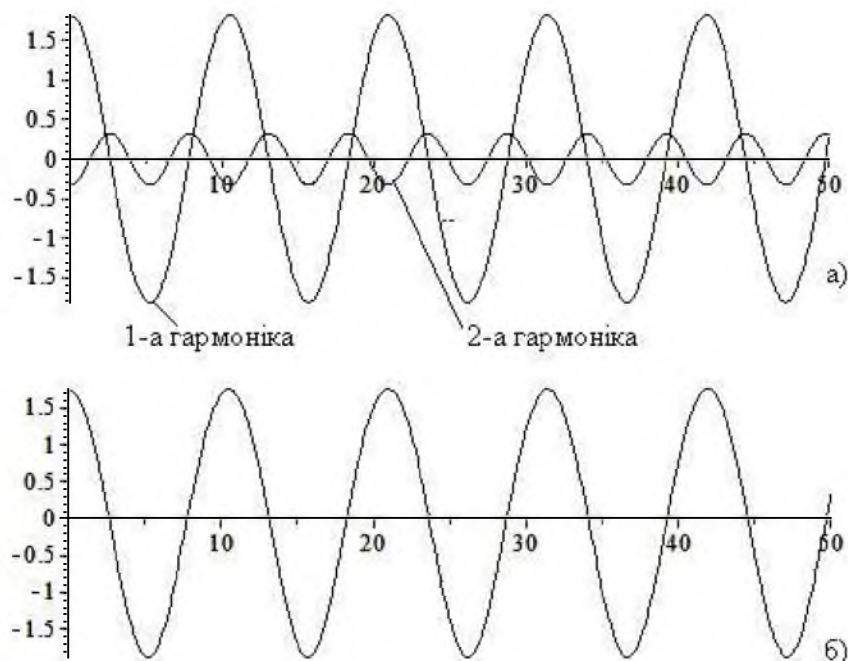


Рис. 3. Відхилення вільної поверхні при  $\Lambda_0 < 0$  а) перші дві гармоніки

$\eta_{01}(x, t)$  та  $\eta_{02}(x, t)$ ; б)  $\eta_0(x, t) = \eta_{01}(x, t) + \alpha \eta_{02}(x, t)$

Якщо  $\Lambda_0 < 0$  то мінімуми  $\eta_{01}(x, t)$  та  $\eta_{02}(x, t)$  співпадають, наступний мінімум  $\eta_{02}(x, t)$  співпадає з максимумом  $\eta_{01}(x, t)$ . Тому в області  $S_2$  вільна поверхня має  $\cap$ -образну форму.

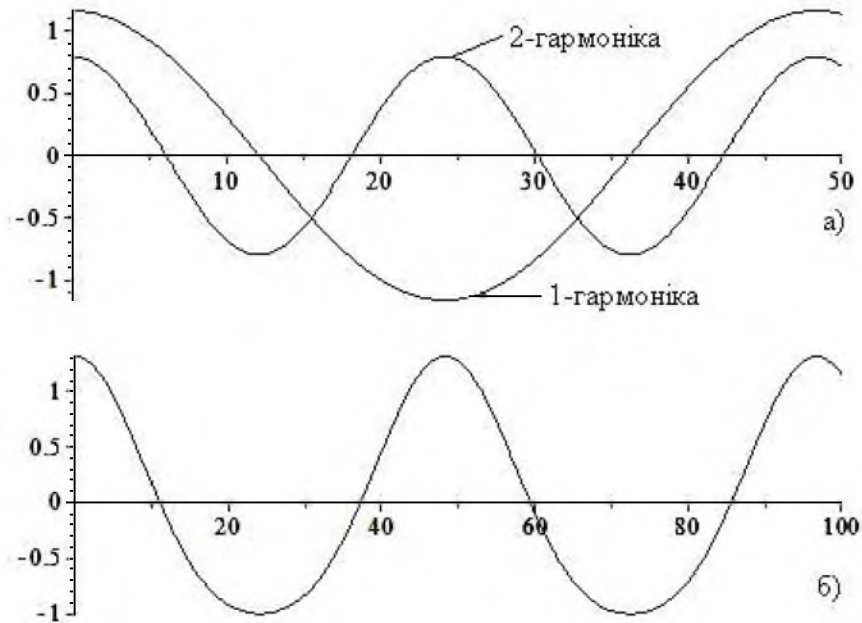


Рис. 4. Відхилення вільної поверхні при  $\Lambda_0 > 0$  а) перші дві гармоніки

$$\eta_{01}(x, t) \text{ та } \eta_{02}(x, t); \text{ б) } \eta_0(x, t) = \eta_{01}(x, t) + \alpha \eta_{02}(x, t)$$

Якщо  $\Lambda_0 > 0$  то максимуми  $\eta_{01}(x, t)$  та  $\eta_{02}(x, t)$  співпадають, а наступний максимум  $\eta_{02}(x, t)$  співпадає з мінімумом  $\eta_{01}(x, t)$ . Тому в областях  $S_1$  та  $S_3$  вільна поверхня має  $\cup$ -образну форму.

**Висновки.** Для слабо нелінійної задачі про поширення хвильових пакетів в двошаровій рідині з вільною поверхнею проведено дослідження форми хвильових пакетів на поверхні контакту та на вільній поверхні для другої пари коренів – частот центру хвильового пакету - дисперсійного рівняння. Встановлено, що на поверхні контакту хвильовий пакет матиме лише  $\cup$ -образну форму для другої пари частот.

## ПОСИЛАННЯ

- [1] Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю.В., Наратовий В.В. (2009). Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в

двухслойной жидкости со свободной поверхностью. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* **52**, №1, 72-83.

[2] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Нарadowый В.В. (2011). Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. *Динамические системы.* **1(29)**, №1, 53-68.

[3] O. Avramenko, V. Naradovyy. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom (2012). *Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences.* **1**.

[4] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. (2005). Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости конечной глубины. *Прикладная гидромеханика.* **7(79)**, № 1, 80-89.

[5] Селезов И. Т., Авраменко О. В.(2000). Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* **44**, №2, 113-122.